

Eclipses e Geometrias

um Almanaque por **zeca bamboo**

Parte 4 versão [xitizap](#) PDF (1 MB)

[download da versão integral \(7 MB\)](#)



Na Índia,

a mais remota evidência das matemáticas remonta à civilização Harappan que, por volta de 3000 a.C., habitava o Vale do Indo, na parte norte da Índia.

Embora difíceis de decifrar, os textos mais antigos parecem centrar-se em contas comerciais, pesos e medidas, e uma especial referência é feita à técnica de construção de tijolos.

Em meados de 1500 a.C., a cultura harappan é praticamente aniquilada por invasores vindos do Norte, os chamados Arianos, que eram um povo pastorício expressando-se em linguagem indo-europeia – uma linguagem que viria a estar na origem do sânscrito, e de muitas das modernas línguas no mundo. No século IV a.C., Panini, um genial gramático, estuda e codifica o sânscrito, tornando-a numa língua robusta e subtil que permitiu codificar os pensamentos do sub-continente durante mais de dois mil anos.

Se se pode dizer que a matemática Grega cresceu a partir da filosofia, é razoavelmente legítimo sugerir que foi na linguística que as matemáticas indianas terão encontrado algumas das suas fundamentais raízes.



É geralmente reconhecido que o período védico da civilização indiana terá tido início por volta de 1000 a.C., e é durante este período que a cultura e religião hindus se vão estabelecendo através de escrituras como Vedas e Upanishads, e de regras de conduta social como o Código de Manu.

Na sua fase inicial, a literatura védica era essencialmente religiosa e cerimonial, e o conhecimento matemático deste período foi sendo registado em partes dos apêndices às Vedas – conhecidas como Vedantas, que por sua vez eram estruturadas em sutras, curtos aforismos poéticos característicos do sânscrito que visavam oferecer a essência de um argumento sob uma forma condensada e memorizável.



As Vedantas são classificadas em seis campos: fonética, gramática, etimologia, verso, astronomia e rituais, e são estes dois últimos temas que nos oferecem o conhecimento matemático desses tempos.

A Vedanta sobre astronomia é chamada Jyotissutra, enquanto que a que se debruça sobre os rituais é conhecida como Kalpasutras, cujas secções tratando da construção de altares

de sacrifício eram chamadas de Sulbasutras.

As primeiras Sulbasutras foram escritas entre 800-600 a.C. e, não surpreendentemente, uma grande parte delas é devotada à necessidade de se assegurar a conformidade dos rituais religiosos.

A geometria crescia assim a partir do rigoroso respeito pelas escrituras védicas quanto ao tamanho, forma e orientação dos altares. Absoluta precisão era requerida para a eficácia dos rituais tal como se pronunciavam os mantras e, nesse sentido, a geometria hindu viria a expressar-se sob três formas: teoremas geométricos explicitamente formulados, procedimentos para construção de altares de várias formas e algoritmos relacionando estas duas categorias anteriores.



Todavia, o período clássico da matemática indiana começa, de facto, sensivelmente a meio do primeiro milénio d.C.

Grande parte da Índia era então governada pelos Guptas Imperiais que encorajavam fortemente o estudo das artes e ciências. A actividade matemática concentrava-se em três centros: Kusum Pura, a capital imperial, Ujjain no norte, e Mysore no sul e, nesse período clássico, os dois matemáticos mais importantes foram **Aryabhata de Kusumapura** (476-550 d.C.), autor de Aryabhatiya, e **Brahmagupta** (598-670 d.C.) que escreveu Brahmasphutasiddhanta (O Desabrochar do Universo).



A **Aryabhatiya** é escrita em 33 versos, e começa com uma bênção. Prossegue com algoritmos para o cálculo de quadrados, cubos, raízes quadradas e cúbicas e expõe 17 versos tratando de geometria e 11 dedicados à aritmética e álgebra. O verso 10 dá um valor de π como sendo a relação 62,832:20,000 o que equivale a 3.1416, o mais rigoroso valor de Pi durante mais de mil anos.

Aryabhata de Kusumapura foi também o primeiro astrónomo do continente a usar um sistema contínuo de contagem dos dias solares, o que lhe permitia formular regras para a previsão de eclipses.

Na sua obra **Brahmasphutasiddhanta** (628 d.C.), Brahmagupta, que era um dos mais conhecidos astrónomos da escola de Ujjain, estabelece um tratado global do conhecimento astronómico desses tempos. O tratado foi escrito em 25 capítulos mas, segundo os historiadores, apenas os dez primeiros terão formado a sua versão original. E esses são dez capítulos estruturados em tópicos característicos da astronomia hindu do período: longitudes de planetas, os três problemas da rotação diurna, eclipses lunares e solares, o crescente da Lua, a sombra da Lua, e a conjunção de planetas entre si e as estrelas fixas.

Segundo os estudiosos do período, os restantes quinze capítulos parecem constituir um segundo trabalho formando uma adenda ao tratado original. Nestes 15 capítulos, supostamente apensados a Brahmasphutasiddhanta, o autor revê os anteriores tratados de astronomia e matemática, e adiciona algum material científico aos dez capítulos iniciais.

Com brilhantismo, o entendimento de Brahmagupta quanto a sistemas numéricos vai expondo-se ao longo do tratado, e ele define o zero como sendo o resultado da subtracção de um número por si próprio. Ao contrário dos aristotélicos, os matemáticos hindus não temiam o zero, ou o infinito, e esta terá sido uma das razões para o notável desenvolvimento imprimido à sua matemática.

No seu tratado, Brahmagupta explicita também algumas prescipientes regras matemáticas em termos de fortunas (números positivos) e dívidas (números negativos), tais como:

uma dívida menos zero é uma dívida

uma fortuna menos zero é uma fortuna

uma dívida subtraída do zero é uma fortuna

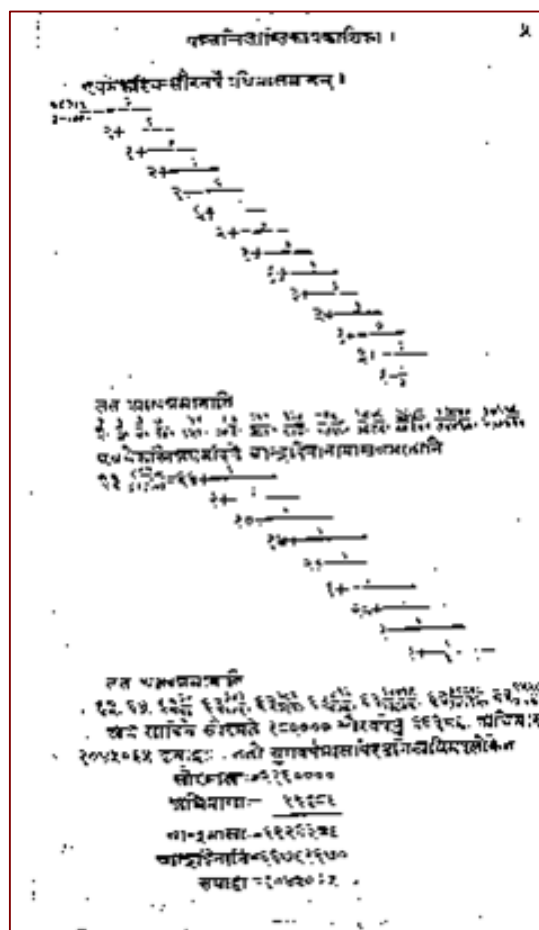
uma fortuna subtraída do zero é uma dívida

Em 665 d.C., numa altura em que Brahmagupta já encabeçava o observatório astronómico em Ujjain, na época o mais avançado centro matemático da Índia, ele escreve um segundo tratado sobre matemática e astronomia, Khandakhadyaka.

Neste trabalho, Brahmagupta descreve métodos de multiplicação por via do valor posicional do número muito similares aos que correntemente se utilizam, e apresenta um algoritmo para o cálculo de raízes quadradas.

Brahmagupta desenvolve inclusivamente alguma notação algébrica, e explicita métodos para resolução de equações quadráticas indeterminadas do tipo $ax^2 + c = y^2$.

E foi através dos trabalhos de Aryabhata e Brahmagupta que os árabes, e posteriormente a Europa, puderam conhecer a sublime riqueza da matemática e astronomia indianas.



O Islam e a matemática astronómica



No século VII, depois de Cristo, a península arábica dava berço a uma nova religião monoteísta.

Aos 40 anos, numa caverna no Monte Hira, norte de Makka, Mohammad teve uma visão a partir da qual começa a receber revelações; parte delas em Makka, antes da Hégira, outras mais tarde em Madina. Revelações que Mohammad vai interpretando no Alcorão (do arábico *qur'am*, que significa leitura) – um Livro Sagrado cujas suratas e versículos abrangem normas da crença em Deus, em Seus Anjos, em Seus Livros, em Seus Mensageiros e no Dia do Juízo Final.

Os versículos e suratas do Alcorão abordam rituais e jurisprudência vária, e contêm narrativas sobre antecessores e sucessores, e de outros povos mais antigos. Para além de explicações sobre normas sociais, o Livro Sagrado do Islam doutrina quanto ao julgamento de diversas questões práticas para as quais era premente encontrar uma solução.

Ao iniciar a pregação desta nova doutrina, Mohammad passa a ser perseguido pelos poderes então estabelecidos em Makka, cidade onde avultavam interesses coraíxitas pagãos.

A repressão sobre o novo Islam agrava-se a tal ponto que, em 622 d.C., o Profeta Mohammad é forçado a procurar um santuário em Madina.

Oito anos depois, o Profeta regressa triunfalmente a Makka.

Inspirados pelas revelações do Profeta Mohammad, os seus seguidores espalham a mensagem do Alcorão conseguindo estabelecer um império islâmico que, no seu auge, se estendia de Córdoba a Samarkand.

Inicialmente governado pela dinastia Umayyad, com capital em Damasco, em 750 d.C. o império islâmico passa a ser controlado pelos abássidas que transferem a capital para Bagdad.

O Islão desenvolve-se então como uma religião baseada no conhecimento. Tal como o propugna o Alcorão que está repleto de versos convidando os homens a usarem o seu

intelecto no sentido de ponderarem, pensarem e adquirirem conhecimento. A própria literatura hadith, ela própria preme de referências quanto à importância do conhecimento, cita dizeres do Profeta:

Do berço ao túmulo, procurem o conhecimento e, verdadeiramente, os homens de conhecimento são os herdeiros dos profetas.

Esses eram dizeres que foram ecoando através da propagação do Islam, e que incitavam os islâmicos a pesquisarem o conhecimento onde quer que fosse possível encontrá-lo. E, de facto, durante grande parte da sua história, a civilização islâmica testemunhou notáveis celebrações do conhecimento – mais a mais, qualquer tradicional cidade islâmica de então possuía bibliotecas privadas e públicas de enorme qualidade. Não é portanto de admirar que, sábios de história, os califas abássidas cedo hajam começado a patrocinar o contacto cultural com outros mundos do conhecimento, em particular no campo de disciplinas intelectuais que por ali ainda não floresciam.



Quando o califa Harun al-Rashid morre em 809, os seus dois filhos disputam em armas um conflito que veio a ser ganho pelo mais novo, Al-Mamum.

O novo califa prossegue a atitude do pai quanto ao mecenato do conhecimento, e procura recriar uma nova Alexandria em Bagdad. E, para além de um observatório astronómico e uma biblioteca de manuscritos e traduções, o novo califa funda a **academia Bait al-Hikma**, a *Casa da Sabedoria*, que será talvez a sua obra maior.

Entre outros aspectos, os termos de referência deste massivo projecto incluíam a tradução para arábico de todo o precioso conhecimento disponível. Os trabalhos de Ptolomeu, Platão, Aristóteles, bem como as mais importantes partes dos tratados científicos clássicos, são então traduzidos, melhorados e profusamente divulgados pelo mundo islâmico.

E, por essa via, as matemáticas e a astronomia recebem então um decisivo impulso.

Abu Jafar Muhammad ibn Musa **al-Khwarizmi** (c. 780-850 d.C.) era um dos professores na Casa da Sabedoria, e o seu nome sugere que ele terá vindo de Khwarizmi na Ásia Central, embora se pense que ele tenha vivido a maior parte da sua vida em Bagdad. Com os seus colegas Banu Musa, al-Khwarizmi traduz manuscritos científicos e estuda e escreve sobre álgebra, geometria e astronomia; al-Khwarizmi dedica a Al-Mamum, seu patrocinador, dois dos seus tratados – um sobre astronomia, e outro sobre álgebra, *Hisab al-jabr wâl-muqabala*, que viria a ser o mais famoso dos seus trabalhos. Incidentalmente, é neste título que a palavra álgebra parece ter sido pela primeira vez documentada e, em certo sentido, este terá também sido o primeiro livro escrito sobre álgebra.

Ao descrever o propósito do seu livro, al-Khwarizmi refere pretender ensinar:

... o que é mais fácil e mais útil na aritmética, tal como é constantemente requerido pelos homens nos casos de herança, legados, partições, casos legais, comércio, ... ou aquando da medição de terras, escavação de canais, computações geométricas e de outros objectos de várias sortes.

Embora esta abordagem não se pareça muito com a álgebra, tal como hoje a conhecemos, importa notar que os primários propósitos de então visavam, não só a praticabilidade, mas também a resolução dos casos diários que iam ocorrendo no império islâmico. E, na parte inicial do seu tratado em álgebra, al-Khwarizmi ao descrever os números naturais explicita uma irónica justificação:



...quando considero o que as pessoas normalmente pretendem do cálculo, o que encontro é um número.

Em **Hisab al-jabr wál-muqabala**, e após a introdução dos números naturais, al-Khwarizmi formula tópicos sobre solução de equações onde trata de equações lineares e quadráticas por manipulação de unidades, raízes e quadrados. Seguindo a tradição da época, as matérias eram inteiramente abordadas através de palavras já que o uso de símbolos matemáticos não era recorrente na didática de então. Al-Khwarizmi começava por reduzir uma equação (linear ou quadrática) a um dos seis modelos de referência e, durante esse processo, ele fazia recurso a duas operações: al-jabr e al-muqabala.

Para al-Khwarizmi, **al-jabr** significava completar - um processo que consistia em remover os termos negativos de uma equação, do qual um conhecido caso será a transformação da equação $x^2 = 40x - 4x^2$ em $5x^2 = 40x$. Por seu lado, o termo al-muqabala refere-se ao processo de simplificar potências do mesmo grau nos dois lados da equação - como era o caso de $50 + 3x + x^2 = 29 + 10x$ em $21 + x^2 = 7x$.

Usando métodos algébricos e/ou geométricos al-Khwarizmi demonstra como resolver as suas seis equações de referência, e muitas das suas demonstrações geométricas sugerem um excelente domínio de *Elementos*, por Euclides.

Na parte seguinte do seu tratado em álgebra, al-Khwarizmi expõe aplicações e exemplos; ele procura então determinar as áreas de figuras como o círculo e o volume de sólidos como esferas, cones e pirâmides, tudo isto numa secção em medições em que mostra uma maior comunhão com os trabalhos hindus e hebreus do que com a tradição do classicismo grego. A parte final do seu tratado trata das complicadíssimas regras islâmicas para heranças num esforço que, da álgebra, requeria apenas o tratamento de equações lineares.

علي تسعة ونلتين ليم السطح الاعظم الذي هو سطح ره فبلغ ذلكت كله اربعة وستين فاخذنا جذريها وهو لمانية وهو احد اضلاع السطح الاعظم فاذا تقصنا منه مثل ما زدنا عليه وهو خمسة بقي ثلثة وهو نيلع سطح اب الذي هو المال وهو جذر د والمائل تسعة وهذه صورته

واما مال واحد وعشرون درهما يعدل عشرة اجذاره فانا نجعل المال سطحا مربعيا حجبول الاضلاع وهو سطح اد ثم نضم اليه سطحا متوازي الاضلاع عرضه مثل احد اضلاع سطح ا ب وهو سطح دن والسطح دب فنصار طول السطحين جميعا سطح ج د وقد علمنا ان طول د عشرة من العدد لى كى سطح مربع معساوي الاضلاع والزوايا فان احد اضلاعه متصروبا لى واحد جذر ذلكت السطح وفي اثنين جذرا فلما قال مال واحد وعشرون يعدل عشرة اجذاره علمنا ان طول سطح د ج عشرة اعداد لى سطح ج د جذر المال فقسما نلوع ج د بنصفين علي نقطة

Al-Khwarizmi escreveu também um tratado sobre os números hindus. O texto em arábico perdeu-se, mas uma tradução latina, *Algorithmi de numero Indorum*, institucionaliza de facto a correlação entre o nome deste matemático e a palavra algoritmo. Nesse trabalho al-Khwarizmi descreve a importância da posição ordinal do número num sistema decimal, e pensa-se que o primeiro uso do zero, em notação posicional, se terá devido a al-Khwarizmi.

Sindhind zij foi um outro trabalho importante de al-Khwarizmi, e esse era agora um tratado em astronomia que se baseava nos trabalhos indianos e não, como ele dizia, nos mais recentes manuais astronómicos islâmicos que se baseiam nos modelos planetários gregos tal como expressos no *Almagest*, de Ptolomeu.

Muito recentemente, Malba Tahan contava que o melhor texto indiano com que al-Khwarizmi

trabalhou terá sido oferecido à corte de Bagdad por uma missão diplomática indiana, em meados de 770, e que dele al-Khwarizmi terá recolhido muita da sua inspiração para produzir *Sindhind zij*.

Apesar de as duas versões escritas em arábico se terem perdido nos tempos, sabe-se que nesse tratado ele abordava uma panóplia de assuntos - calendários, longitude em planetas, trigonometria esférica, paralaxe e cálculo de eclipses.

Posteriormente, em meados de 825 d.C., al-Khwarizmi desenvolve tabelas trigonométricas que ainda permanecem como uma referência no universo matemático moderno; e os seus cálculos à quinta casa decimal passaram a permitir o desenvolvimento de uma nova precisão na astronomia e outras ciências.

Como é universalmente reconhecido por todos os matemáticos, al-Khwarizmi situa-se na primeira linha da história da ciência. Na verdade, a Leste e a Oeste de então, ele foi o sábio que compôs e desenvolveu alguns dos mais importantes trabalhos matemáticos, ajudando assim a erguer a principal fonte de conhecimento matemático durante os séculos seguintes - especialmente na Europa quando foi traduzido para latim.

Circa 850 d.C., **al-Battani** nasce em Harran e, embora oriundo de uma família que havia seguido as tradições sabéias, este matemático seria certamente islâmico, como aliás sugere o seu nome: Abu Allah Mohammad ibn Jabir ibn Sinan al-Raqqi al Harrani al-Sabi al-Battani.

Foi em Antioch, e em ar-Raqqah na Síria, que al-Battani levou a cabo muitas das suas notáveis observações astronómicas. Sobretudo em ar-Raqqah, nas margens do Rio Eufrates, onde Harun al-Rashid, o quinto califa da dinastia Abbasid, havia mandado construir vários palácios e plataformas de observação.

Num trabalho compilado em 988 d.C. pelo bibliotecário ibn an-Nadim, o *Fihrist* (Índice), al-Battani é assim referido:

... um dos famosos observadores e um líder em geometria, astronomia teórica e prática, e astrologia. Ele compôs um livro sobre astronomia, com tabelas contendo as suas próprias observações do Sol e da Lua numa descrição mais rigorosa do que a dada no Almagest de Ptolomeu.



O *Fihrist* refere também que, entre os anos 877 e 918, al-Battani efectuou observações astronómicas, e que o seu catálogo de estrelas se baseou no ano 880. Este *Índice* cita vários trabalhos de al-Battani nomeadamente o seu grande trabalho em astronomia, **Kitab al-Zij** - um tratado que contém 57 capítulos e que começa com uma descrição da esfera celestial dividida em signos e graus zodiacais onde várias ferramentas matemáticas, tais como operações com fracções sexagesimais e funções trigonométricas, são introduzidas.

O capítulo quarto de Kitab al-Zij inclui observações de al-Battani, e um grande número de questões astronómicas é discutido do capítulo quinto ao vigésimo sexto. Os capítulos 27 a 31 abordam os movimentos do Sol, Lua e dos cinco planetas, onde a teoria proposta é basicamente a de Claudius Ptolomeu. O tratado prossegue abordando a conversão de datas, e dezasseis capítulos são dedicados ao modo como as suas tabelas devem ser lidas, ao que se seguem capítulos sobre astrologia e sobre a construção de relógios solares e outros instrumentos astronómicos.

Entre os seus maiores feitos, al-Battani é creditado como tendo catalogado 489 estrelas, e por ter refinado alguns dos cruciais valores astronómicos até então estabelecidos, nomeadamente a duração do ano (365 dias 5 horas 48 minutos e 24 segundos) e os períodos das estações. Ele refina ainda o ritmo de precessão anual dos equinócios em 54.5" por ano, e chega ao valor de 23° 35' para a inclinação da eclíptica. E ao invés de métodos geométricos, como Ptolomeu, al-Battani usa uma nova trigonometria que lhe permitia provar que a distância do Sol à Terra varia e que, por isso mesmo, os eclipses do sol tanto podem ser totais, como anulares.

Já **Ibn Yunus** foi um personagem descrito por um biógrafo seu contemporâneo como um homem excêntrico, descuidado e distraído; um homem que se vestia de roupas coçadas e que tinha um aspecto cómico.

Abu'l-Hasan Ali ibn Abd al-Rahman ibn Ahmad ibn Yunus al-Sadafi, de seu nome completo,

cresceu num período de turbulências militares. Por essa altura, a dinastia fatímida, cujo nome deriva de Fátima, a filha do Profeta Mohammad, orquestrava um movimento que procurava assumir todo o poder político e religioso do Islam; uma dinastia que se recusava a reconhecer o regime constitucionalmente islâmico dos califas Abbasid e que, na primeira metade do século X, estendia já o seu poder sobre todo o norte de África e Sicília.

Após vários reveses na tentativa de conquistarem o Egipto, em 969 os fatímidas conseguem finalmente passar a dominar o vale do baixo Nilo - onde fundam a cidade de Cairo, capital do seu império - e é nessa altura que **Ibn Yunus** se torna uma popular figura na cidade mercê dos seus calendários astrológicos.



O principal trabalho de Ibn Yunus foi **al-Zij al_hakimi al-kabir**, um extenso manual de astronomia com 81 capítulos, onde ele descreve 40 conjunções planetárias e 30 eclipses da Lua que seriam mais tarde utilizados na formulação de algumas teorias lunares.

Em *Hakimi Zij*, **Ibn Yunus** aborda os calendários islâmicos, cópticos, sírios e persas, e fornece tabelas para sua equiparação. Inclusivamente, ele calcula as sempre difíceis datas da Páscoa cristã.

As suas funções trigonométricas são expressas em arcos, e não em ângulos, e com ele a trigonometria esférica viria a atingir um pináculo de sofisticação.

Bizarro como sempre, Ibn Yunus terá sido também um dos poucos cientistas a estabelecer uma data para a sua morte. Ele predisse-a com 7 dias de antecedência, e quando ainda gozava de boa saúde. Após resolver os seus assuntos correntes, Ibn Yunus decide fechar-se em casa e concentrar-se na recitação do Alcorão - até que

falece na data prevista.

Durante os séculos XI e XII o ritmo de avanço da ciência islâmica entra em marcado declínio e, estranhamente, muitos dos grandes livros e ideias científicas passam a ser remetidos para plano inferior nas terras islamizadas.

Ainda hoje parece não haver consenso quanto às determinantes desse declínio e, embora se admita que a insularidade a que a cultura islâmica se remeteu possa ter sido uma das razões, há quem sugira que o progressivo ostracismo intelectual imposto às mulheres o tenha acelerado.

Seja como for, numa Europa ávida de transpor a sua era de trevas, os trabalhos matemáticos islâmicos viriam a ter enorme influência na revolução do pensamento europeu, em particular após, em 1116, Plato de Tivoli ter traduzido para latim o tratado *Kitab al-Zij*, por al Battani, sob o título *De motu stellarum*, do qual edições impressas viriam a ser publicadas em 1537, e de novo em 1645.